RiskSIM

STABLAB Statistisches Beratungs Labor

LMU

TrÜbPl Münsingen – Kampfmittelräumung

Studie zu Testfelduntersuchungen

Stichprobenplanung und -ziehung

Mai/Juni 2003

Dr. Helmut Küchenhoff

Dr. Andreas Henking

Inhaltsverzeichnis

1 Zusammenfassung

Aufgabe der Studie ist es, Kriterien für Größe, Form und Anzahl von Testfeldern bei Testfelduntersuchungen zur Kampfmittelräumung von Truppenübungsplätzen zu entwickeln. Dabei finden Erkenntnisse aus Phase A „Historische Erkundung“ Eingang.

Bei der Größe von Testfeldern lässt sich aus statistischer Sicht feststellen, dass eine kleinere Fläche eines Testfeldes und die daraus resultierende größere Testfelderanzahl für die Genauigkeit der Ergebnisse der Testfelduntersuchung von Vorteil sind.

Es werden quadratische Testfelder mit rechteckigen verglichen. Hier zeigt sich unter gewissen Annahmen, dass rechteckige Testfelder vorzuziehen sind. Die Aussagen zu Größe und Form der Testfelder werden über rein theoretische Betrachtungen getroffen. Eine Validierung dieser Ergebnisse anhand ausgewerteter Testfelder ist ratsam.

Durch das Vorwissen aus Phase A können Truppenübungsplätze nach bestimmten Charakteristika, wie z.B. die Intensität der Kampfmittelbelastung, unterteilt werden. Im statistischen Sinne handelt es sich dabei um Schichten. Zur Bestimmung eines optimalen Stichprobenumfangs, mit dem Ziel einer möglichst genauen Schätzung der Kampfmittelbelastung, kann dieses Vorwissen für sogenannte geschichtete Stichproben verwendet werden. Es ist entweder möglich, bei vorgegebener Genauigkeit der Schätzung die dafür notwendige Anzahlen an Testfeldern zu bestimmen oder bei Vorgabe einer Gesamtzahl zu räumender Testfelder die optimale Verteilung der Testfelder auf die Schichten zu ermitteln. Bei der Bestimmung der Testfeldanzahlen kann man auch die Kosten für Testfeldräumungen, unterschieden nach Schichten, berücksichtigen.

Nach Ermittlung der Anzahl zu räumender Testfelder werden diese zufällig ausgewählt. Dafür wird ein Verfahren vorgeschlagen, bei dem die Testfelder möglichst gut über den Truppenübungsplatz verteilt sind. Dieses Verfahren berührt die Optimalitätseigenschaften der Testfeldanzahlen nicht.

Nach Räumung der Testfelder müssen diese ausgewertet werden. In der Studie finden sich alle Formeln zur Bestimmung der relevanten Größen Mittelwerte, Varianzen und Konfidenzintervalle je Schicht und für den gesamten Truppenübungsplatz.

Zur Planung der Testfeldanzahlen wird ein Berechnungswerkzeug entwickelt, dass die Handhabung der teilweise recht komplexen Formeln erleichtert.

2 Einleitung und Motivation für die Studie

Das Vorgehen bis zur Kampfmittelräumung von Truppenübungsplätzen erfolgt in drei Phasen:

A. Historische Erkundung: Luftbildauswertung, Geländebefunde

B. Technische Erkundung: Geophysikalische Verfahren, Testfelder räumen
C. Räumung

Bisher gilt als Faustregel, dass 1-2% eines Truppenübungsplatzes als Testfelder ausgewiesen werden. Nun sollen die Testfelder nach statistischen Verfahren aufgrund der Ergebnisse aus Phase A ausgewählt werden, um den Aufwand zur Räumung des Truppenübungsplatzes abzuschätzen. Die Fragestellungen sind dabei:

- Optimierung der Größe und der Form der Testfelder
- Anzahl der nötigen Flächen
- Verteilung der Kampfmittel mit Sicherheitsabschätzung
- Beurteilung der Qualität (Fehler, Aussagesicherheit, Repräsentativität) der Testfelduntersuchungen
- Räumliche Verteilung der Testfelder

Die Stichprobentheorie der Statistik liefert hierzu das Werkzeug. So ist es möglich mit einer vorgegebenen Sicherheit den dafür nötigen Stichprobenumfang (Anzahl der Testfelder) und vice versa zu bestimmen.

Truppenübungsplätze sind nicht gleichmäßig mit Kampfmitteln belastet. So ist zu erwarten, dass Schießbahnen stärker belastet sind als Randgebiete (Sicherheitszonen) eines Truppenübungsplatzes. Auch hängt die Kampfmittelbelastung der Schießbahnen von der jeweils verwendeten Munition etc. ab. In Phase A erhält man Vorwissen über die verschiedenen Belastungen, das quantifiziert werden kann. Mit Hilfe dieses Vorwissens können Schichten, also Charakterisierungen von Teilflächen, gebildet werden und man erhält eine genauere Schätzung der Zielgröße (Schichtungseffekt).

Die Anwendung der in dieser Studie erarbeiteten Ergebnisse und Verfahren ist nicht auf Truppenübungsplätze beschränkt, sondern ist für alle Liegenschaften möglich.

3 Stichproben

3.1 Planung, Ziehung und Auswertung

Vor der Auswertung einer Stichprobe steht die Planung und die Ziehung bzw. Auswahl der Testfelder. Die einzelnen Phasen werden im folgenden kurz erläutert.

Planung: Durch die Planung der Stichprobe ist es möglich, den Stichprobenumfang auf die gewünschte Genauigkeit der Auswertungsergebnisse abzustimmen.

Ziehung: Prinzipiell kann man bei der Ziehung zwischen systematisch und zufällig unterscheiden. Die zufällige Stichprobe erhält man i.d.R. durch computergenerierte (Pseudo-) Zufallszahlen.

Auswertung: Die bei der Stichprobenziehung ermittelten Testfelder werden untersucht und ausgewertet. Das heißt, die Ergebnisse aus den Testfelder werden auf die Grundgesamtheit, also den gesamten Truppenübungsplatz, hochgerechnet.

3.2 Grundlegende Begriffe

Es muss geklärt werden, auf welche **Grundgesamtheit** sich die Auswertung beziehen soll. Aus dieser Grundgesamtheit wird die **Stichprobe** gezogen. Die Grundgesamtheit muss in einzelne **Untersuchungseinheiten** (hier: **Testfelder**) unterteilt werden können. Es werden alle Untersuchungseinheiten als Testfelder bezeichnet, damit auch jene, die nicht in die Stichprobe gelangen. Jedes Testfeld hat die Möglichkeit, in die Stichprobe zu gelangen und muss auswertbar sein. Alle Testfelder zusammen bilden die Grundgesamtheit. Bei vorliegender Problemstellung ist die Grundgesamtheit idealer weise der gesamte Truppenübungsplatz.

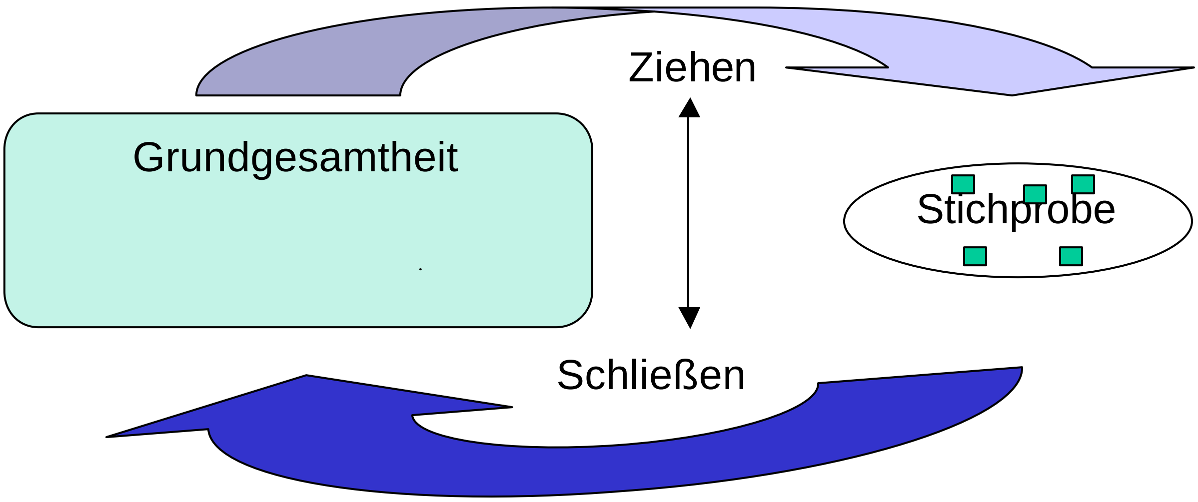

Abbildung 1: Prinzip der Stichprobenziehung

Die Testfelder sollten in Größe und Form gleichartig sein, um eine effiziente Auswertung zu gewährleisten. Eine Stichprobe heißt **repräsentativ**, wenn aus ihr der Schluss auf die zugrunde gelegte Grundgesamtheit erlaubt ist (Kreienbrock).

Zur Bestimmung der **Zielgröße** muss festgelegt werden, was gemessen werden soll und welche (quantitative) Größe dazu erhoben wird. Da der Aufwand für die Räumung des Truppenübungsplatzes abgeschätzt werden soll, wird als Zielgröße die **Anzahl der Störkörper pro Flächeneinheit** festgelegt.

Bei der Auswertung werden die erhobenen Daten verdichtet. Dies erfolgt i.d.R. zunächst durch die Bildung von **Mittelwerten**, also der mittleren Anzahl der Störkörper je Flächeneinheit. Es ist nicht zu erwarten, dass in jedem Testfeld gleich viele Störkörper gezählt werden. Die Anzahl der Störkörper schwankt also, man sagt sie streut. Die Streuung kann mit der **Varianz** gemessen werden. Da in der Stichprobe nur ein kleiner Teil des Truppenübungsplatzes untersucht wird, sind die in der Stichprobe ermittelten Mittelwerte nur eine **Schätzung** der entsprechenden wahren Mittelwerte. Schätzungen weichen in der Regel von den wirklichen Größe ab. Mit Hilfe der Varianz werden Aussagen über die Genauigkeit der Schätzung der mittleren Anzahl der Störkörper je Flächeneinheit abgeleitet. Bei der Stichprobenplanung dient die Varianz der Vorhersage der Genauigkeit der Schätzung. Die Varianz dient auch zur Quantifizierung der Eigenschaften der Schichten der Stichprobe. In Berechnungen geht die Varianz meist mit ihrer Quadratwurzel ein, der **Standardabweichung**.

Mit Hilfe der Varianz und einem **Sicherheitsniveau** konstruiert man **Konfidenzintervalle** um den geschätzten Mittelwert. Das Sicherheitsniveau ist dabei eine vorgegebene Wahrscheinlichkeit mit der das Konfidenzintervall den wahren Mittelwert der Grundgesamtheit enthält. Üblicherweise wählt man als Sicherheitsniveau eine Wahrscheinlichkeit von 95% oder größer. Die Breite des Konfidenzintervalls liefert dabei eine anschauliche Größe für die Genauigkeit der Schätzung.

Bei der Planung der Stichprobe können verschiedene Optimalitätskriterien vorgegeben werden. Beispielsweise das Sicherheitsniveau und die Breite des Konfidenzintervalls. Oder die maximale Anzahl von Testfeldern. Aber auch und vor allem sind varianz- und kostenoptimale Kriterien möglich.

3.3 Stichprobentypen

3.3.1 Einfache Zufallsstichprobe

Eine Stichprobe mit vorgegebenen Umfang aus einer Grundgesamtheit heißt einfache Zufallsstichprobe, wenn sie die gleiche Auswahlwahrscheinlichkeit wie alle andere möglichen Stichproben gleichen Umfangs besitzt. Diese Form der Erhebung ist sinnvoll, falls keine Zusatzinformation vorliegt.

3.3.2 Systematische Stichprobe

Bei der systematischen Stichprobe gelangen die Untersuchungseinheiten nach einer vorgegebenen Systematik in die Auswahl. Dieses Verfahren ist zulässig, wenn die Repräsentativität der Stichprobe gewährleistet ist. Allerdings ist dies bei der Auswahl von Testfeldern eines Truppenübungsplatzes fraglich, da Besonderheiten des Geländes durch die systematische Auswahl über- oder unterrepräsentiert werden können. Legt man als Systematik ein Raster des Truppenübungsplatzes, wobei die Testfelder auf den Knotenpunkten des Rasters in die Auswahl gelangen, zugrunde, so könnte es passieren, dass das Raster genau auf dem Grat einer Geländeerhebung verläuft, was zu einer Verzerrung in der Auswertung führen kann.

3.3.3 Geschichtete Stichproben

Bei geschichteten Stichproben wird Vorwissen zur Auswahl der Testfelder einbezogen. Dabei wird die Grundgesamtheit in sogenannte Schichten aufgeteilt. Die Schichten sollten in sich möglichst homogen sein, sich also in bezug auf die Zielgröße ähnlich verhalten. Zwischen den Schichten sollen möglichst große Unterschiede bestehen.

Nach der Phase A kann man den Truppenübungsplatz in verschiedene Bereiche mit bspw. starker, mittlerer und schwacher Belastung unterteilen. Die Stärke der Belastung wird durch die ungefähre Angabe der Streuung der Anzahl der Störkörper je Flächeneinheit quantifiziert. Auch ist es denkbar, zusätzlich Schichten nach ihren Räumungskosten zu bilden, um die Kosten bei der Testfeldräumung genauer zu schätzen und besser steuern zu können.

Durch geschichtete Stichproben erhält man einen erheblichen Effizienzgewinn, also genauere Schätzungen der Zielgrößen. Anders ausgedrückt: durch Schichtung erhält man gegenüber der einfachen Zufallsstichprobe kleinere Konfidenzintervalle für die Schätzung bei gleichem Stichprobenumfang.

3.4 Stichprobenplan

Der Stichprobenplan ist ein verbindliches Manual für alle an der Stichprobenziehung Beteiligten. In ihm ist folgendes beschrieben:

- Festlegung der Grundgesamtheit der Testfelder
- Festlegung und Charakterisierung der Schichten,
- die ausgewählten Testfelder je Schicht,
- wie bei der Erhebung vorzugehen ist,
- welche bzw. ob es Ausschlusskriterien für Testfelder gibt,
- und wie die Nichterhebung ausgewählter Testfelder dokumentiert werden muss.

4 Kriterien für Form und Größe der Testfelder

4.1 Größe der Testfelder

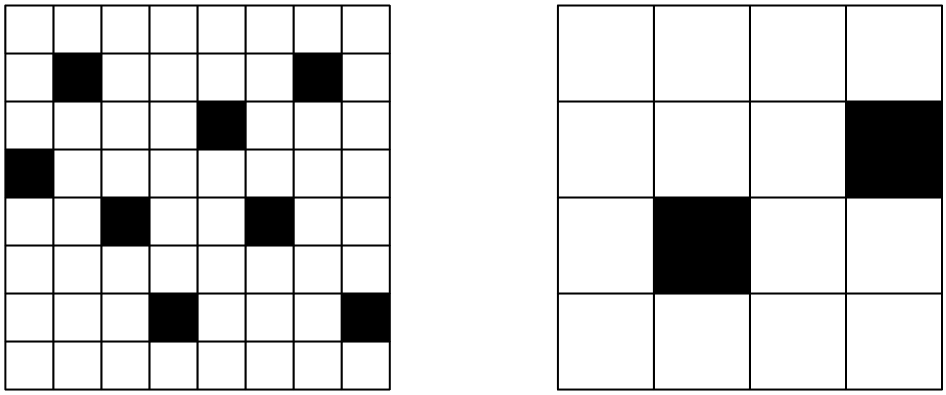

Abbildung 2: Stichproben mit unterschiedlicher Größe der Flächeneinheiten

Wir vergleichen die Genauigkeit einer Stichprobe, die auf der Ziehung von n quadratischen Flächeneinheiten basiert, mit der Genauigkeit einer Stichprobe, bei der $4n$ Einheiten von quadratischer Fläche der halben Seitenlänge gezogen werden. Beide Stichproben decken also die gleiche Fläche ab (siehe Abb. 2). Im Anhang wird ein Vergleich der beiden Verfahren beschrieben. Dabei ergibt sich unter plausiblen Annahmen eine höhere Genauigkeit der Stichprobe mit den kleineren Flächeneinheiten.

Fazit: Aus statistischer Sicht ist eine möglichst kleine Wahl der Untersuchungseinheiten sinnvoll. Die Untersuchungseinheiten sollten so gewählt werden, dass eine Analyse vom technischen Aufwand noch sinnvoll erscheint. Eine genauere Quantifizierung des Größeneffekts ist möglich, wenn aus Testfelduntersuchungen die Korrelation zwischen benachbarten Testfeldern geschätzt werden kann.

4.2 Form der Testfelder

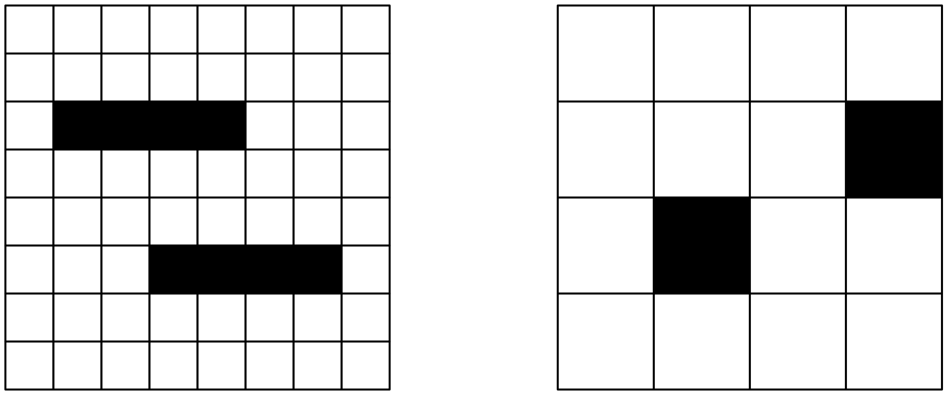

Abbildung 3: Stichproben mit Untersuchungseinheiten unterschiedlicher Form.

Wir vergleichen dazu eine Unterteilung der Gesamtfläche in quadratische Testfelder (2a*2a) mit einer Unterteilung in rechteckige Testfelder (a*4a) (siehe Abb. 3). Der im Anhang näher ausgeführte Genauigkeitsvergleich liefert keine eindeutigen Ergebnisse. Es zeigt sich, dass hierbei die räumliche Struktur eine entscheidende Rolle spielt.

Fazit: Ohne Daten zur räumlichen Struktur kann man kaum Aussagen zur optimalen Form der Testfelder machen. Im Fall einer räumlichen Korrelationsstruktur, die primär von der Entfernung der einzelnen Einheiten abhängt (genauer: bei Abnahme der Korrelation bei größerer Entfernung) ist die Ziehung von flächengleichen Rechtecken denen von Quadraten vorzuziehen.

5 Geschichtete Stichproben

Wie in Abschnitt 3.2 dargestellt gehen wir von einer Unterteilung des Truppenübungsplatzes in Testfelder aus. Da nach Phase A Vorwissen über die Verteilung der Kampfmittelbelastung vorliegt und die systematische Auswahl wie oben begründet nicht in Frage kommt, lässt sich vorliegende Fragestellung am besten mit geschichteten Stichproben lösen.

Durch geschichtete Stichproben kann man bei gleichem Stichprobenumfang genauere Schätzungen der Zielgröße erhalten. Dazu sind idealer weise die Schichten untereinander möglichst heterogen und jede Schicht in sich möglichst homogen. Auf die Kampfmittelbelastung bezogen heißt das, dass diese in jeder Schicht möglichst gleichmäßig verteilt ist und sich die Verteilung von denen der anderen Schichten möglichst stark unterscheidet. Charakterisiert wird die Verteilung durch die Streuung der Kampfmittelbelastung je Schicht.

5.1 Schichten

Die Schichten bei der Testfelduntersuchung entsprechen verschiedenen Bereichen des Truppenübungsplatzes, die nach Belastungsintensität oder anderen Kriterien unterteilt sind. Diese Bereiche entsprechen den Schichten bei der Stichprobenziehung.

5.1.1 Anforderungen an die Schichten

- jedes Testfeld muss genau einer Schicht zugeordnet werden können. Das heißt, dass der gesamte Truppenübungsplatz in Schichten unterteilt sein muss und dass sich die Schichten nicht überschneiden.
- Die Schichten sollten bzgl. der Zielgröße möglichst homogen sein.
- Schichten müssen nicht zusammenhängend sein.
- die Gesamtfläche der Schichten kann verschieden sein.

5.1.2 Schichten und Zielgrößen

Der Truppenübungsplatz wird in L Schichten unterteilt. Die Größe L sollte allein durch die fachlichen Überlegungen aus Phase A bestimmt werden.[1] Wählt man $L=1$, so geht die geschichtete Stichprobe in die einfache Zufallsstichprobe über. Jede Schicht ist in eine bekannte Anzahl von Testfelder unterteilbar, die in die Stichprobe gelangen können. Sind alle Testfeld gleich groß, lässt sich aus der Anzahl der Testfelder auch die Fläche der Schichten berechnen.

Aus jeder Schicht wird eine einfache Zufallsstichprobe gezogen. Die Stichprobenumfänge können nach verschiedenen Optimalitätskriterien festgelegt werden (vgl. Abschnitt 5.2).

Erhoben werden die (unbekannten) Anzahlen der Störkörper in jedem Testfeld. Die Zielgröße ist die mittleren Anzahl der Störkörper eines Testfeldes. Und zwar für jede Schicht und für den gesamten Truppenübungsplatz.

5.1.3 Varianzen und deren Schätzung

Verwirrend kann die Vielzahl der Varianzen und deren Schätzung, die bei geschichteten Stichproben von Bedeutung sind, sein. Auf eine Angabe der Varianzen kann, nicht zuletzt aus Vollständigkeitsgründen, nicht verzichtet werden.

[1] Allerdings gibt es in dem Berechnungswerkzeug eine technische Grenze von maximal 15 Schichten.

Die Schichtvarianzen messen die Streuungen der Anzahlen der Störkörper innerhalb der Schichten. Falls die Schichtvarianzen unbekannt sind, müssen diese geschätzt werden. Da die Schätzung der mittleren Anzahlen der Störkörper mit einer Ungenauigkeit belegt sind, gibt es Varianzen zur Quantifizierung dieser Ungenauigkeiten und wiederum Schätzungen dieser Varianzen, da diese in der Regel unbekannt sind.

An den Formeln zur Varianzschätzung (vgl. Anhang) erkennt man, dass die Schätzung des Mittelwertes eine kleinere Varianz bei größerem Stichprobenumfang bekommt. Sie wird also genauer.

5.1.4 Konfidenzintervalle

Die Varianz allein ist nur wenig anschaulich zur Quantifizierung der Unsicherheit geeignet. Man bildet mit Hilfe der Varianz und eines Sicherheitsniveaus $1-a$ Konfidenzintervalle (auch: Sicherheitsintervalle). Diese geben an, mit welcher Sicherheit $1-a$ der Mittelwert der Zielgröße in dem berechneten Konfidenzintervall liegt. Da die Varianz des Mittelwertschätzers unbekannt ist, wird dabei die geschätzte Varianz verwendet. Diese Schätzung ist umso genauer, je größer der Stichprobenumfang ist, also wird auch das Konfidenzintervall kleiner, je größer der Stichprobenumfang ist. Je größer das Sicherheitsniveau sein soll, mit der der wahre Mittelwert vom Konfidenzintervall überdeckt wird, desto breiter wird das Konfidenzintervall.

Umgekehrt lässt sich aus Vorgaben für die Breite und das Sicherheitsniveau des Konfidenzintervalls, also eine Vorgabe der Genauigkeit der Schätzung, der dafür notwendige Stichprobenumfang bestimmen.

Je nach Auswahlverfahren der Stichprobe, kann die Schätzung der Varianz andere Werte annehmen. Das Sicherheitsniveau findet über das Quantil der Normalverteilung Eingang in die Bestimmung des Konfidenzintervalls.

Für das Sicherheitsniveau sind $1-a=0{,}95$ und $1-a=0{,}99$ üblich. Die Werte der zugehörigen Quantile sind in der statistischen Anwendungsliteratur bzw. im Fachkonzept des Berechnungswerkzeuges zu finden.

Anmerkung: Die Verwendung des Normalverteilungsquantils impliziert eine gute Annäherung der Verteilung der Schätzung der Mittelwerte an die Normalverteilung. Im Zusammenhang mit der Stichprobenziehung aus endlichen Grundgesamtheiten ist dieses Problem nicht trivial. Hierbei ist für die Anzahl der Störkörper nach Einschätzung der Autoren entscheidet, dass es keine Ausreißerproblematik gibt, was evtl. durch eine starke Homogenität der Schichten vermieden werden kann. Falls die Normalverteilung aufgrund von Ausreißern nicht das passende Verteilungsmodell wäre, würde dies bedeuten, dass die Länge der Konfidenzintervalle unterschätzt wird, in Wirklichkeit also eine geringere Genauigkeit vorliegt. Das Ausmaß dessen kann allerdings erst abgeschätzt werden, wenn ausreichend Testfelder ausgewertet wurden.

5.1.5 Charakterisierung und Quantifizierung von Schichten bei der Kampfmittelräumung

Die Schichten werden dadurch charakterisiert, wie stark die Kampfmittelbelastung ist. So kann bspw. zwischen niedriger, mittlerer und hoher Kampfmittelbelastung unterschieden werden. Aber auch andere Schichtungen sind denkbar, z.B. nach den Kosten der Räumung oder Beschaffenheit des Geländes. Allerdings sollte das Zielmerkmal innerhalb einer Schicht möglichst homogen sein.

Um eine möglichst effiziente Stichprobenplanung zu erreichen, ist es nötig, Informationen zur Streuung zu haben. Ein Maß für die Streuung ist die Varianz, die aber nach Phase A nicht bekannt sein dürfte. Daher muss die Varianz geschätzt werden. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Es wird eine kleinere Anzahl von Testfelder geräumt als zunächst geplant. Diese Testfelder werden ausgewertet, also die Störkörper gezählt, wonach man die Varianz schätzen kann (vgl. Formel 3). Dabei muss darauf geachtet werden, dass alle Schichten unter den geräumten Testfeldern ausreichend repräsentiert sind.
2. Nach Phase A werden die Bereiche geschätzt, in denen sich die Anzahlen der Störkörper je Testfeld und Schicht höchstwahrscheinlich befinden. Es werden also die vermutlichen Unter- und Obergrenzen der Anzahl der Störkörper angegeben. Bei drei Schichten sind dies drei Bereiche:

   Schicht 1: $\lfloor y_{u_1}, y_{o_1} \rfloor$

   Schicht 2: $\lfloor y_{u_2}, y_{o_2} \rfloor$

   Schicht 3: $\lfloor y_{u_3}, y_{o_3} \rfloor$

   Dabei können sich die Bereiche ganz oder teilweise überschneiden. Allerdings sind möglichst kleine Bereiche und eine geringe Überschneidung günstig für die Effizienz der Stichprobe.

   Geht man davon aus, dass bei 95% aller Testfelder, was dem $2-s$ -Bereich entspricht, die Anzahl der Störkörper in dem angegeben Bereich liegt, so lässt sich eine Faustregel für die Varianz angeben:

$$\hat{s}_h^2 = \left(\frac{y_{o_h} - y_{u_h}}{4} \right)^2 .$$

Prinzipiell lässt sich keine der beiden Berechnungsmethoden favorisieren. Je nach Genauigkeit des Vorwissens und Erfahrung muss man sich für eine der beiden Berechnungsmethoden entscheiden.

Das Vorwissen geht nur in die Stichprobenplanung und nicht in die Auswertung ein. Dies hat den Vorteil, dass falsch getroffene Annahmen dadurch zwar zu einer suboptimalen Stichprobenplanung führen können, aber die Richtigkeit der Auswertung nicht berührt wird. Eine suboptimale Stichprobenplanung bedeutet dann, eine eventuell größere Ungenauigkeit der Schätzungen als ursprünglich durch das Vorwissen und die Planung impliziert.

5.2 Bestimmung der Stichprobenumfänge und der erwarteten Schätzgenauigkeit

Zur Auswahl der Stichprobenumfänge je Schicht, müssen Optimierungsprobleme gelöst werden. Um eine möglichst genaue Schätzung der mittleren Anzahl der Störkörper je Testfeld zu erhalten, muss die Varianz des zugehörigen Schätzers minimiert werden.

Eine andere Möglichkeit ist die Wahl der Stichprobenumfänge nach Kostengesichtspunkten. Auch hier sind geschichtete Stichproben vorteilhaft, da die Räumungskosten je Schicht angegeben werden können. Somit können Räumungskosten auch ein Schichtungskriterium sein.

Als dritte Möglichkeit, kann die gewünschte Genauigkeit der Schätzung vorgegeben werden, um unter dieser Vorgabe die optimalen Stichprobenumfänge je Schicht zu bestimmen.

Zuletzt können die Stichprobenumfänge je Schicht vorgegeben sein. Daraus kann man die Genauigkeit der resultierenden Schätzungen bestimmen.

5.2.1 Varianzoptimale Aufteilung

Unter Vorgabe des Gesamtstichprobenumfangs lassen sich die Stichprobenumfänge je Schicht bestimmen, die die Varianz der Schätzung des Gesamtmittelwertes minimieren. [2]

Zur Berechnung der Schichtstichprobenumfänge werden die Schichtenvarianzen benötigt. Diese sind aber in der Regel nicht bekannt. Daher setzt man für die Schichtenvarianzen die Schätzungen aus dem Vorwissen ein. Wie man diese Schätzungen erhält, wird in Abschnitt 5.1.5 beschrieben.

Ebenso wird das Vorwissen zur Bestimmung der Varianz der Mittelwertschätzung benötigt. Diese Varianz, oder ihre Schätzung, kann zur Abschätzung der Breite des Konfidenzintervalls von der Gesamtmittelwertschätzung verwendet werden. Man erhält damit Aussagen über die Genauigkeit der Schätzung bei ermittelter Stichprobenaufteilung. Für die Bildung von Konfidenzintervallen im Rahmen der Auswertung nach Erhebung der Stichprobe, verwendet man jedoch andere Varianzformeln (vgl. Abschnitt 7 bzw. Anhang).

[2] Im Berechnungswerkzeug ist vorgesehen, dass die Stichprobenumfänge je Schicht größer oder gleich zwei sein sollten, da sich sonst die Varianzen nicht berechnen lassen.

5.2.2 Kostenoptimale Aufteilung

Sind neben dem Gesamtstichprobenumfang die Kosten für die Räumung eines Testfeldes für verschiedene Schichten vorgegeben, so lassen sich kostenoptimalen Stichprobenumfänge bestimmen. Formal werden die Gesamtkosten kontrolliert und unter dieser Vorgabe die Varianz der resultierenden Mittelwertschätzer minimiert. Die Stichprobenumfänge der Schichten mit hohen Räumungskosten werden dann gegenüber der varianzoptimalen Aufteilung kleiner gewählt.

Bei der Bestimmung der Kosten ist das Verhältnis der Räumungskosten untereinander entscheidend. Das bedeutet, es müssen nicht die absoluten Kosten angegeben werden. Setzt man die Kosten für alle Schichten gleich, so geht die kostenoptimale Aufteilung in die varianzoptimale über.[3]

Die Varianz der Gesamtmittelwertschätzung, oder ihre Schätzung, kann zur Abschätzung der Genauigkeit der Schätzung des Gesamtmittelwertes verwendet werden.

5.2.3 Vorgabe der Genauigkeit der Schätzung

Bei der Bestimmung der optimalen Stichprobenumfänge in den beiden vorhergehenden Abschnitten, war der Gesamtstichprobenumfang vorgegeben. Eine weitere Möglichkeit ist, das Sicherheitsniveau und die Genauigkeit, also die halbe Länge des Konfidenzintervalls, für die Schätzung des Gesamtmittelwertes vorzugeben und daraus den Gesamtstichprobenumfang abzuleiten, der nötig ist, um diese Genauigkeit zu erreichen.

Mit dem Gesamtstichprobenumfang ist es, mit Hilfe der Überlegungen in den beiden vorgehenden Abschnitten, möglich, die optimale Aufteilung bei vorgegebener Sicherheit zu bestimmen.

Vermutlich ist es in der Regel aus Sachzwängen nur möglich weit weniger als alle Testfelder einer Schicht zu räumen. Dementsprechend muss überprüft werden, ob die ermittelten Stichprobenumfänge klein genug sind.

5.2.4 Vorgabe der Stichprobenumfänge je Schicht

Falls die Stichprobenumfänge für jede Schicht und das Sicherheitsniveau vorgegeben sind, lässt sich die Genauigkeit der Gesamtmittelwertschätzung bei diesen Stichprobengrößen abschätzen.

---

[3] Daher wird im Berechnungswerkzeug nicht zwischen varianz- und kostenoptimaler Aufteilung unterschieden.

6 Auswahl der Testfelder

6.1 Ohne Berücksichtigung der räumlichen Verteilung

Bei der Ermittlung der geschichteten Stichprobe, wird aus jeder Schicht eine einfache Zufallsstichprobe gezogen. Vorgegeben ist die Anzahl der Testfelder, die je Schicht in die Stichprobe gelangen sollen.

6.2 Berücksichtigung einer gleichmäßigen räumlichen Verteilung

Bei der Ziehung einer räumlichen Stichprobe ist das Ziehen von Einheiten aus möglichst allen Bereichen der Fläche wünschenswert. Dies ermöglichst dann einerseits eher eine Analyse der räumlichen Struktur und andererseits einen Effizienzgewinn durch die mögliche Korrelation von Flächen mit geringem Abstand zueinander.
Um die Vorteile der geschichteten Stichproben trotzdem nützen zu können, ist folgendes Vorgehen sinnvoll.

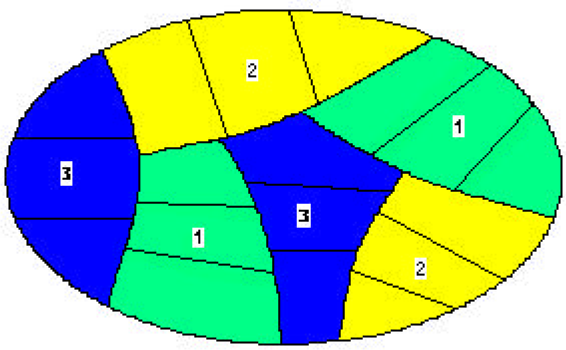

Abbildung 4: Aufteilung der Fläche in Schichten erster und zweiter Ordnung

Man unterteilt die Schichten weiter in Schichten 2. Ordnung ein. Diese sollten zusammenhängend und eine gleichartige räumliche Struktur haben. Man teilt nun den vorgesehenen Stichprobenumfang einer Schicht auf die Schichten 2. Ordnung proportional zu ihrer Größe auf.
Beispiel: Die Schicht 1 besteht aus 300 Testfeldern. Die Schicht 1 wird unterteilt in 3 Bereiche 1A, 1B, 1C mit 100, 150 bzw. 50 Testfelder. Ist der Stichprobenumfang für die 1. Schicht mit $n_h = 40$, vorgesehen, so zieht man aus 1A 13 1B 20 und aus 1C 7 Testfelder.

Die Überlegungen und Berechnungen zur optimalen Stichprobenplanung berührt dies nicht. Auch die Auswertungsformeln bleiben von einer Schichtung 2. Ordnung in oben beschriebener Form unberührt.

7 Auswertung der Stichprobe

Nach der Räumung der Testfelder folgt die Auswertung. Dazu müssen zunächst die Störkörper je Testfeld gezählt werden. Wobei es durchaus relevant ist, welcher Schicht das Testfeld zugehört. So kann man nachträglich die Annahmen über die Schichtvarianzen überprüfen und Schätzungen für die Räumungskosten je Schicht angeben.

Die interessierenden Größen, nämlich Schichtmittelwerte, Gesamtmittelwert sowie die dazugehörigen Varianzen und Konfidenzintervalle, berechnen sich durchweg nach bereits in dieser Studie verwendeten Formeln. Der Übersichtlichkeit halber werden die für die Auswertung relevanten Formeln im Anhang gesondert und zusammenfassend aufgeführt, mit den Referenzen auf die Formelnummern der bereits verwendeten Formeln.

Als Besonderheit bei der Auswertung gegenüber der Planung ist zu beachten, dass die Schichtenvarianzen aus den ausgewerteten Testfeldern neu geschätzt werden. Ihre Abschätzungen nach Phase A spielen für die Auswertung keine Rolle. Jedoch sollte das Vorwissen anhand der Auswertungsergebnisse überprüft werden.

8 Schlussbemerkungen und Ausblick

In der vorliegenden Studie wurde als wesentliches Werkzeug die geschichtete Stichprobe genutzt. Diese Strategie hat den Vorteil einer relativ einfachen Struktur und einer nachvollziehbaren Nutzung von zusätzlichen Informationen. Diese Strategie könnte noch durch Verwendung weiterer Hilfsmerkmale ergänzt werden. Vorschläge zur Nutzung der räumlichen Information aus der Geostatistik sind das sog. „kriging“ (siehe z.B. Thompson (2002). Außerdem ist die Nutzung weiterer Variablen, die mit der Zielgröße korreliert sind, über Regressionsansätze denkbar (Sarndal et al, 1992). Allerdings dürfte der Effizienzgewinn gegenüber einer Schichtung in möglichst homogenen Schichten eher gering sein.

Jedoch sind zur Beantwortung dieser Frage wie auch anderen Fragen, die in der Studie diskutiert wurden, letztlich nur mit einer Analyse von Beispieldatensätzen möglich. Es lassen sich dann genauere Aussagen zu den Fragestellungen

- Kostenoptimale Größe der Testfelder
- Form der Testfelder
- Normalverteilungsannahme

treffen.

Anhang

Größe der Testfelder

Der Vergleich der beiden Ziehungsstrategien (n quadratische Flächeneinheiten gegen 4n quadratische Flächeneinheiten mit halber Seitenlänge, siehe Abb. 2) kann mit der Theorie der sogenannten Klumpenstichprobe beantwortet werden. Die Ziehung der größeren Einheiten entspricht einer Klumpenstichprobe aus den kleineren Einheiten, wobei jeweils vier Flächen zu einem Klumpen zusammengefasst werden.

Der Vergleich der Genauigkeit (siehe z. B. Kreienbrock, 1993) ist durch die Formel

$$Var\hat{\bar{Y}}_k = Var\hat{\bar{Y}} \cdot (1 + r(K-1))$$

gegeben. Dabei ist $Var\hat{\bar{Y}}_k$ die Streuung des Mittelwertschätzers bei der Klumpenstichprobe, also im vorliegenden Fall des Schätzers, der auf den größeren Einheiten basiert. $Var\hat{\bar{Y}}$ ist die Varianz des Schätzers, der auf den $4n$ kleineren Einheiten basiert. K ist die Klumpengröße, also gilt in unserem Fall $K = 4$. Mit r wird der sogenannte Intra-Klassen–Korrelationskoeffizient bezeichnet. Er entspricht im Prinzip der durchschnittlichen Korrelation zwischen zwei Einheiten innerhalb eines Klumpens. In unserem Fall ist er durch die Korrelation zwischen benachbarten Flächeneinheiten gegeben. Es ist davon auszugehen, dass $r \geq 0$ gilt.

Man sieht an obiger Formel, dass der Effizienzgewinn durch Verwendung kleinerer Einheiten von der räumlichen Struktur der Grundgesamtheit abhängt. Je höher die Korrelation benachbarter Einheiten ist, desto höher ist der Effizienzgewinn bei gleich großer Gesamtfläche. Im Extremfall der Korrelation 1 liefert die Ziehung einer benachbarten Einheit keine neue Information. Beträgt die Korrelation von benachbarten Einheiten z. B. $r = 0{,}2$, so ist die Streuung bei der Verwendung der größeren Einheiten bei gleich großer untersuchter Gesamtfläche um den Faktor 1,6 höher. Die Konfidenzintervalle sind dann um den Faktor $\sqrt{1{,}6} = 1{,}26$ länger. In diesem Fall wäre eine Stichprobe vom 1,6-fachen Flächenumfang nötig um die gleiche Genauigkeit bei der Schätzung der Durchschnittsbelastung zu erhalten. Besteht zwischen den benachbarten Untersuchungseinheiten nur ein geringer Zusammenhang, so ist der Effizienzgewinn gering. In der Regel wird aber mit einer positiven Korrelation von benachbarten Flächen zu rechnen sein.

Form der Testfelder

Für den Vergleich der beiden (quadratische bzw. rechteckige Testtfelder, siehe Abb. 3) Ziehungsstrategien benutzt man wieder die Theorie der Klumpenstichprobe. Betrachtet man jeweils eine Unterteilung der Fläche in 4 quadratische Testfelder der Größe a*a, so kann man beide Ziehungen wieder als Klumpenstichprobe auffassen. Man benötigt den Intra-Klassen-Korrelations-koeffizienten von beiden Ziehungen. Erfahrungsgemäß kann man davon ausgehen, dass die Korrelation benachbarter Testfelder größer ist als die von Testfeldern, die weiter voneinander entfernt sind. Geht man zum Beispiel von einem Modell aus, bei dem die Korrelation $r = 0{,}2$ bei direkt benachbarten und $r = 0{,}2 \cdot 0{,}2$ bei Nachbarn 2. Ordnung und $r = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2$ bei Nachbarn 3. Ordnung beträgt, so erhält man beim Quadrat näherungsweise den Intra-Klassen-Korrelationskoeffizienten 0,2 und bei dem Rechteck den Wert (0,2*3+ 2*0,04+0,008)/6= 0,113. Die Varianz des Mittelwertschätzers ist also bei der Rechecksstichprobe um den Faktor (1+3*0,113)/(1+3*0,2)=0,84 geringer . Dieser Effizienzgewinn ist aber sehr stark von der räumlichen Struktur abhängig. Gibt es z. B. Belastungsstrukturen, die eine rechteckige Form haben, so kann die Intra-Klassen-Korrelation bei den Rechtecken größer sein, und eine quadratische Form ist vorzuziehen.

Die obigen Überlegungen gelten auch für den Fall der geschichteten Stichprobe. Hier kann man die einzelnen Schichten getrennt betrachten und kommt zu entsprechenden Ergebnissen innerhalb der Schichten.

Formeln und Berechnungswege

Bezeichnungen

L	Anzahl der Schichten
N_h	Anzahl Testfelder je Schicht $h = 1, \ldots, L$
N	Anzahl Testfelder auf dem gesamten Truppenübungsplatz
n_h	Anzahl Testfelder in der Stichprobe je Schicht $h = 1, \ldots, L$
n	Gesamtstichprobenumfang
Y_{h_i}	(unbekannte) Anzahl der Störkörper in Testfeld i der Schicht h, $h = 1, \ldots, L, i = 1, \ldots, N_h$
$\overline{Y}_{h\cdot}$	Mittlere Anzahl der Störkörper je Testfeld in Schicht h
$\overline{Y}_{\cdot\cdot}$	Mittlere Anzahl der Störkörper je Testfeld, bezogen auf den gesamten Truppenübungsplatz
y_{h_i}	Beobachtete Anzahl der Störkörper in Testfeld i der Schicht h, $h = 1, \ldots, L, i = 1, \ldots, n_h$
$\hat{\overline{Y}}_{h\cdot}$	Geschätzte mittlere Anzahl der Störkörper je Testfeld in Schicht h, d.h. Schätzung von $\overline{Y}_{h\cdot}$

$\hat{\bar{Y}}_{..}$	Geschätzte mittlere Anzahl der Störkörper je Testfeld, bezogen auf den gesamten Truppenübungsplatz, d.h. Schätzung von $\bar{Y}_{..}$
W_h	Anteil der h -ten Schicht an der Grundgesamtheit
s_h^2	Schichtvarianz, Varianz innerhalb der Schicht h
$\hat{s}_h^2$	Schätzung der Schichtvarianz
$Var\left(\hat{\bar{Y}}_{h\cdot}\right)$	Varianz der Schichtenmittelwertschätzung
$\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{h\cdot}\right)$	Schätzung der Varianz der Schichtenmittelwertschätzung
$Var\left(\hat{\bar{Y}}_{..}\right)$	Varianz der Gesamtmittelwertschätzung
$\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{..}\right)$	Schätzung der Varianz der Gesamtmittelwertschätzung
y_{u_h}	vermutliche Untergrenze der Anzahl der Störkörper in Schicht h
y_{o_h}	vermutliche Obergrenze der Anzahl der Störkörper in Schicht h
G	Genauigkeit einer Schätzung
$1-\alpha$	Sicherheitsniveau
$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$	Quantil der Normalverteilung zum Sicherheitsniveau $1-\alpha$
n_h^*	Ergebnis bei der Bestimmung der Schichtstichprobenumfänge nach Optimalitätskriterien (i.d.R. nicht ganzzahlig)
$Var_{vopt}\left(\hat{\bar{Y}}_{..}\right)$	Varianz der Gesamtmittelwertschätzung bei varianzoptimaler Aufteilung
c_h	Kosten für die Räumung eines Testfeldes in Schicht $h, h=1,\ldots,L$
$Var_{copt}\left(\hat{\bar{Y}}_{..}\right)$	Varianz der Gesamtmittelwertschätzung bei kostenoptimaler Aufteilung
C	Gesamtkosten der Testfeldräumung

Mittelwerte, Varianzen und Konfidenzintervalle

$$N = \sum_{h=1}^{L} N_h$$

$$n = \sum_{h=1}^{L} n_h$$

$$\bar{Y}_{h\cdot} = \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} Y_{h_i}$$

$$\bar{Y}_{..} = \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} \sum_{i=1}^{N_h} Y_{h_i}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} y_{h_i}$$ **Formel 1**

$$\hat{\bar{Y}}_{..} = \sum_{h=1}^{L} W_h \cdot \hat{\bar{Y}}_{h\cdot}$$ **Formel 2**

$$W_h = \frac{N_h}{N}$$

$$s_h^2 = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{i=1}^{N_h} \left(Y_{h_i} - \bar{Y}_{h\cdot} \right)^2$$

$$\hat{s}_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} \left(y_{h_i} - \hat{\bar{Y}}_{h\cdot} \right)^2$$ **Formel 3**

$$Var\left(\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} \right) = \frac{1}{n_h} \left(1 - \frac{n_h}{N_h} \right) s_h^2$$

$$\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} \right) = \frac{1}{n_h} \left(1 - \frac{n_h}{N_h} \right) \hat{s}_h^2$$ **Formel 4**

$$Var\left(\hat{\bar{Y}}_{..} \right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 Var\left(\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} \right)$$

$$\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{..} \right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} \right)$$ **Formel 5**

Konfidenzintervall für den Gesamtmittelwert der Störkörper je Testfeld:

$$\left[\hat{\bar{Y}}_{..} - z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{..} \right)}, \hat{\bar{Y}}_{..} + z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{..} \right)} \right]$$ **Formel 6**

oder $\hat{\bar{Y}}_{..} \pm G$ mit $G = z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{..} \right)}$

Varianzoptimale Aufteilung

$$n_h^* = \frac{n \cdot N_h \cdot \sigma_h}{\sum_{i=1}^{L} N_i \sigma_i}, \quad h = 1, \ldots, L, \qquad \textbf{Formel 7}$$

Für die varianzoptimalen Stichprobenumfänge gilt: $n_1^* : n_2^* : \ldots : n_L^* = W_1 \sigma_1 : W_2 \sigma_2 : \ldots : W_L \sigma_L$.

Die Lösung erfüllt die Nebenbedingung $n = \sum_{h=1}^{L} n_h^*$, allerdings werden die n_h^* in der Regel nicht ganzzahlig sein. Daher wählt man als näherungsweise varianzoptimale Aufteilung die gerundeten Werte: $n_h = round\left(n_h^*\right)$.

$$Var_{vopt}\left(\hat{\bar{Y}}_{..}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h\right)^2 - \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h^2 . \qquad \textbf{Formel 8}$$

Geschätzt wird diese Varianz durch Einsetzen des Vorwissens $\hat{\sigma}_h$.

Kostenoptimale Aufteilung

$$n_h^* = \frac{n \cdot N_h \cdot \frac{\sigma_h}{\sqrt{c_h}}}{\sum_{i=1}^{L} N_i \frac{\sigma_i}{\sqrt{c_i}}}, \quad h = 1, \ldots, L . \qquad \textbf{Formel 9}$$

Für die kostenoptimalen Stichprobenumfänge gilt: $n_1^* : n_2^* : \ldots : n_L^* = \frac{W_1 \sigma_1}{\sqrt{c_1}} : \frac{W_2 \sigma_2}{\sqrt{c_2}} : \ldots : \frac{W_L \sigma_L}{\sqrt{c_L}}$.

Auch hier gilt, dass die n_h^* nicht ganzzahlig sein werden, daher wählt man wieder die jeweils gerundeten Stichprobenumfänge: $n_h = round\left(n_h^*\right)$.

$$Var_{copt}\left(\hat{\bar{Y}}_{..}\right) = \frac{1}{C}\left(\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h \sqrt{c_h}\right)^2 - \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} W_h \sigma_h^2 , \qquad \textbf{Formel 10}$$

wobei $C = \sum_{h=1}^{L} c_h n_h$ die Gesamtkosten für die Erhebung der Stichprobe sind.

Analog zur varianzoptimalen Aufteilung wird diese Varianz durch Einsetzen des Vorwissens $\hat{s}_h$ geschätzt.

Vorgabe der Genauigkeit der Schätzung

Die Genauigkeit als halbe Breite des Konfidenzintervalls in Formel 6 beträgt $G = z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{\widehat{Var}\left(\hat{\hat{Y}}_{..}\right)}$ oder in Kurzschreibweise $G = z_{1-\frac{a}{2}} \hat{s}$. Ist neben der Länge auch das Sicherheitsniveau $1-a$ vorgegeben, so lässt leicht sich der gewünschten Wert von $\hat{s}$ bzw. $\hat{s}^2$ bestimmen: $\hat{s}^2 = \left(\frac{G}{z_{1-\frac{a}{2}}} \right)^2$.

Über die Formel 8 lässt sich dann der resultierende Gesamtstichprobenumfang bestimmen:

$$n = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h s_h \right)^2}{\hat{s}^2 + \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} W_h s_h^2}.$$

Nun liegen alle Informationen vor, um über Formel 7 die Stichprobenumfänge in den Schichten zu bestimmen.

Über Formel 10 lassen sich die resultierenden Kosten bei vorgegebener Genauigkeit bestimmen: $C = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h s_h \sqrt{c_h} \right)^2}{\hat{s}^2 + \frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} W_h s_h^2}$. Damit lässt sich der Gesamtstichprobenumfang berechnen: $n = \frac{C \cdot \sum_{h=1}^{L} N_h \cdot \frac{s_h}{\sqrt{c_h}}}{\sum_{h=1}^{L} N_h \cdot s_h \cdot c_h}$.

Die zugehörigen Stichprobenumfänge je Schicht bestimmen sich über Formel 9.

Vorgabe der Stichprobenumfänge je Schicht

Falls die Stichprobenumfänge $n_h, h = 1, \mathrm{K}, L$ vorgegeben sind, lassen sich über Formel 4 und Formel 5 die Varianzen und damit die Genauigkeit der resultierenden Schätzungen abschätzen.

Formeln zur Auswertung

Mittelwerte:

$$\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} y_{h_i}$$ **Formel 1**

$$\hat{\bar{Y}}_{\cdot\cdot} = \sum_{h=1}^{L} W_h \cdot \hat{\bar{Y}}_{h\cdot}$$ **Formel 2**

Varianzschätzungen:

$$\hat{s}_h^2 = \frac{1}{n_h - 1} \sum_{i=1}^{n_h} \left(y_{h_i} - \hat{\bar{Y}}_{h\cdot} \right)^2$$ **Formel 3**

$$\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} \right) = \frac{1}{n_h} \left(1 - \frac{n_h}{N_h} \right) \hat{s}_h^2$$ **Formel 4**

$$\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{\cdot\cdot} \right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} \right)$$ **Formel 5**

Konfidenzintervalle:

für den Schichtmittelwert: $$\left[\hat{\bar{Y}}_{h\cdot} - z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{h.} \right)}, \hat{\bar{Y}}_{h\cdot} + z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{h.} \right)} \right]$$

für den Gesamtmittelwert: $$\left[\hat{\bar{Y}}_{\cdot\cdot} - z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{\cdot\cdot} \right)}, \hat{\bar{Y}}_{\cdot\cdot} + z_{1-\frac{a}{2}} \sqrt{\hat{Var}\left(\hat{\bar{Y}}_{\cdot\cdot} \right)} \right]$$ **Formel 6**

Literatur

Kreienbock, Lothar: „Einführung in die Stichprobenverfahren“, Oldenbourg, 1993.

Thompson, Steven, K.: ”Sampling”, Wiley, New York, 2002.

Sarndal, C., Svensson, B., Wretman, J.: ”Model Assisted Survey Sampling”, Springer, New York, 1992.